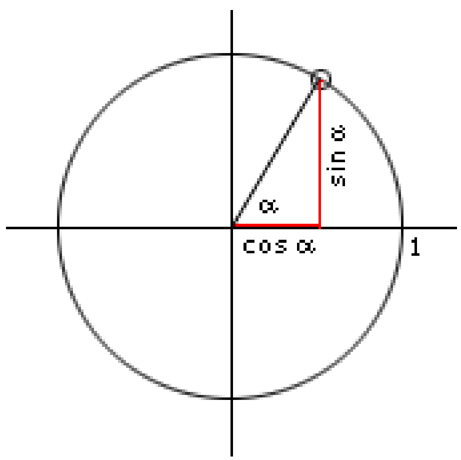
21C3

Crashkurs Mathematik am Beispiel Biometrie

Jule P Riede
Chaosnahe Gruppe Wien
jriede@ap.univie.ac.at

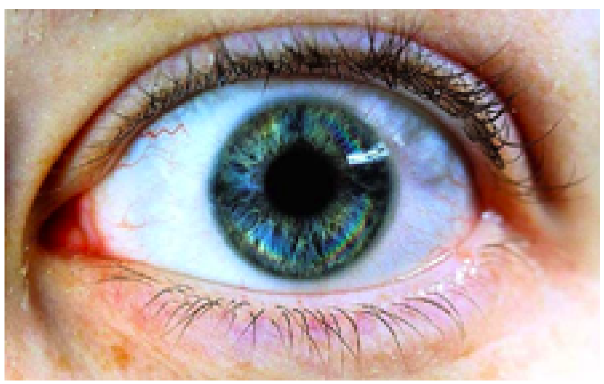
29. Dezember 2004

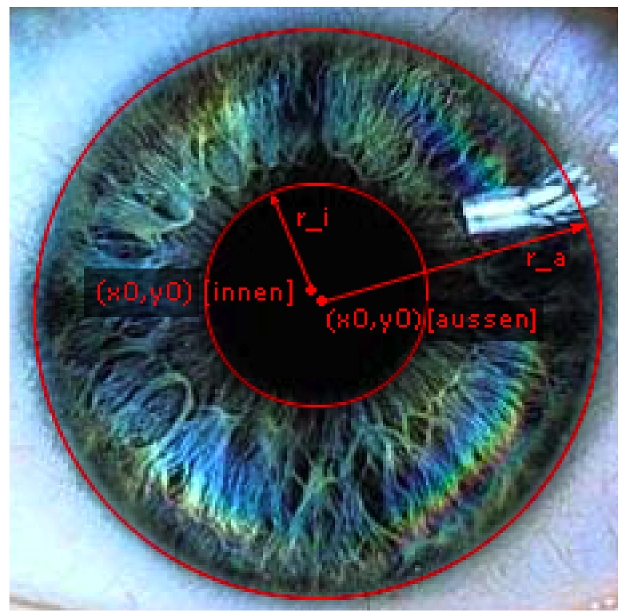
KEINE PANIK

JA BITTE	NEIN DANKE
Spaß	Frust
Verstehen	Definition, Satz, Beweis
Nutzen	unnötiger Aufwand
	$sin\alpha := \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$ $cos\alpha := \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$

Motivation:

Finde die Iris im Bild





Motivation:

Finde die Iris im Bild

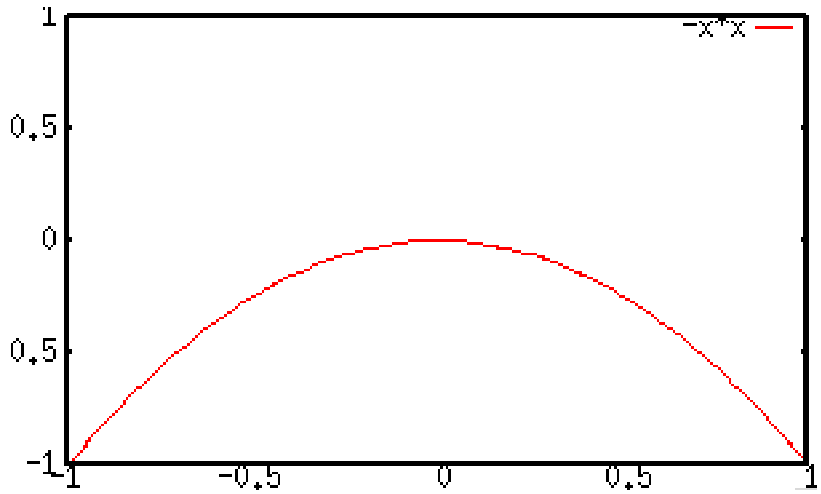
(Daugman) Sucht folgendes:

$$max_{(r,x_0,y_0)}\left|G_\sigma\left(r\right) * \frac{\partial}{\partial r}\oint\frac{I\left(x,y\right)}{2\pi r}ds\right|$$

Auf Deutsch: Wir suchen das Maximum eines weichgezeichneten Gradienten über bestimmte (normierte) Kurvenintegrale

$\mapsto$ viele (neue?) Begriffe:
Maximum, 'Weichzeichner', (partielle) Ableitung, Normierung, Integral

Was ist ein Maximum?



a) **Intuitiver Zugang**: Ein Buckel, 'Da ist es eben am größten'

b) **Exakter Zugang**:

Eine auf $D \subseteq R$ erklärte Funktion f hat in $a \in D$ ein (globales) Maximum, wenn $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in D$

Wieder ein neuer Begriff: *Funktion*

Was ist eine Funktion?

Programmierer:

'Man wirft was rein und kriegt was raus' zusammen mit einem Codefragment der Art

```
float quadrat(float x) {
  return x*x;
}
```

Mathematiker:

eine Funktion auf einer Menge X ist eine Vorschrift f, die jedem Element $x \in X$ in eindeutiger Weise eine Zahl $f(x)$ zuordnet.

Funktionen (cont.)

in eindeutiger Weise

Auf gut Deutsch: wirft man ein und dasselbe x zweimal in die Funktion rein, kommt auch zweimal das selbe wieder raus

Fragen zu Funktionen?

(partielle) Ableitung

Relevant für Funktionen in mehreren Variablen. Wir haben erst mal nur eine - vor den partiellen kommen die handelsüblichen ;)

Dazu brauchen wir *Differentialrechnung*

Differentialrechnung

Eine Funktion $f : I \to C$ auf einem Intervall I heißt differenzierbar in $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dieser heißt dann *Ableitung* oder *Differentialquotient* von f in x_0. Die Funktion heißt *differenzierbar im Intervall* I, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar ist.

Eine schöne Definition. Aber was bedeutet das? Was ist dieses *lim*?

Limiten

lim steht für Limes (Grenzwert)

Folgengrenzwerte: Die Eulersche Zahl e (Beispiel)

$$e = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

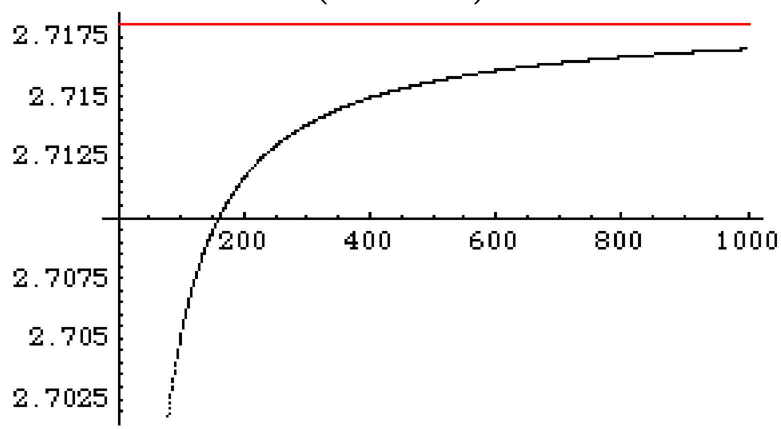
n=1: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{1}\right) = 2$

n=5: $\left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 \simeq 2.49$

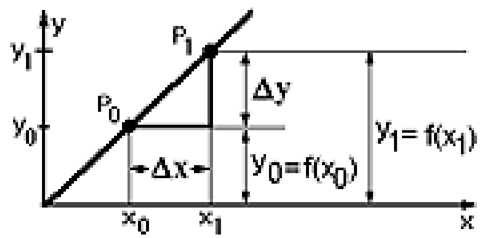
n=1000: $\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} \simeq 2.72$

Limiten

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \simeq 2.7183$$



Steigung einer Geraden



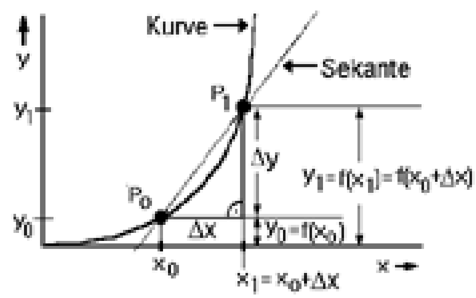
$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

andere Version der gleichen Sache:

$$y = kx + d$$

Sekantensteigung

Eine Sekante ist eine Gerade, die mit einer Kurve zwei Schnittpunkte P_0 und P_1 gemeinsam hat

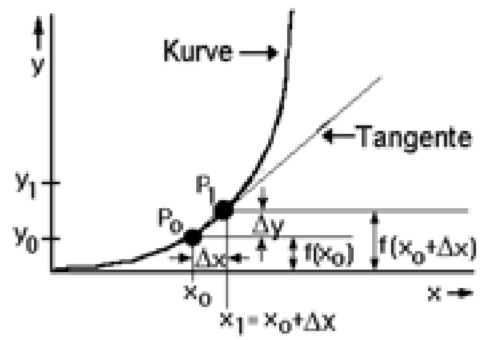


Auch eine Sekante ist eine Gerade $\mapsto$ Wie vorher, nur mit Funktionswerten statt y-Werten

$$k_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Tangentensteigung

Fehlt nur noch der Limes ;)



$x_1 \rightarrow x$ (umbenennen - völlig egal wie man's benennt). Gehen mit x immer näher an x_0 (bilden den Limes) und bekommen

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(entspricht der Definition!) Ableitung von $f(x)$ wird meist als $f'(x)$ bezeichnet

Ein Beispiel

Unsere Funktion: $f(x) = x^2$, $x = x_0 + \Delta x$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - (x_0)^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x_0^2 + 2\Delta x x_0 + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{2\Delta x x_0 + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x \to x_0} 2x_0 + \Delta x = 2x_0 = 2x$$

Regeln

Funktion	Ableitung	Funktion	Ableitung
x^n	$(n-1)x^{n-1}$	c	0
$ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$	sin x	cos x
e^{ax}	ae^{ax}	cos x	-sin x

Mehr Regeln

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[c * f(x)]' = c * f'(x)$$

$$[f(x) * g(x)]' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)' \text{ (Produktregel)}$$

$$[\frac{f(x)}{g(x)}]' = \frac{f(x)'g(x) - f(x)g(x)'}{g(x)^2} \text{ (Quotientenregel)}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) + g'(x) \text{ (Kettenregel)}$$

Beispiele: Linearität

$$[f(x) + g(x)]' = [x^2 + sin(x)]' = 2x + cos(x)$$

$$[c * f(x)]' = [4x^3]' = 3 * 4 * x^2 = 12x^2$$

Beispiele: Produktregel

$$[f(x) * g(x)]' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'$$

$$[f(x) * g(x)]' = [x^3 * sin(x)]' = 3x^2 * sin(x) + x^3 * cos(x)$$

Beispiele: Quotientenregel

$$[\tfrac{f(x)}{g(x)}]' = \tfrac{f(x)'g(x) - f(x)g(x)'}{g(x)^2}$$

$$[\frac{f(x)}{g(x)}]' = [\frac{3x}{x+1}]' = \frac{3(x+1) - 3x}{(x+1)^2}$$

Beispiele: Kettenregel

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$$

$$[f(g(x))]' = [e^{2x}]' = 2e^{2x}$$

partielle Ableitungen

Bei Funktionen in mehreren Variablen hat man mehrere Möglichkeiten: z.B. $f(r,\varphi) = rsin(\varphi)$

$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$

Partielle Ableitung: $\frac{\partial}{\partial r}f(r,\varphi)$ oder $\frac{\partial}{\partial \varphi}f(r,\varphi)$

partielle Ableitungen (cont.)

$\frac{\partial}{\partial r} f(r, \varphi)$ heißt: leite nur nach r ab und lasse den Rest in Ruhe

$$\frac{\partial}{\partial r} f(r, \varphi) = \frac{\partial}{\partial r}(r sin(\varphi)) = sin(\varphi)$$

Zwischenstand

$$max_{(r,x_0,y_0)}\left|G_\sigma\left(r\right)*\frac{\partial}{\partial r}\oint\frac{I\left(x,y\right)}{2\pi r}ds\right|$$

Weichzeichner?

$$max_{(r,x_0,y_0)}\left|G_\sigma\left(r\right)*\frac{\partial}{\partial r}\oint\frac{I\left(x,y\right)}{2\pi r}ds\right|$$

Gaussian Blur: eigentlich Faltung der aktuellen Funktion mit einer Gaussverteilung
Theorie: Faltung zweier Funktionen via Produkt der fouriertransformierten Funktionen, danach Rücktrafo des Ergebnisses

Sorry

Heute keine Fouriertrafos ;)

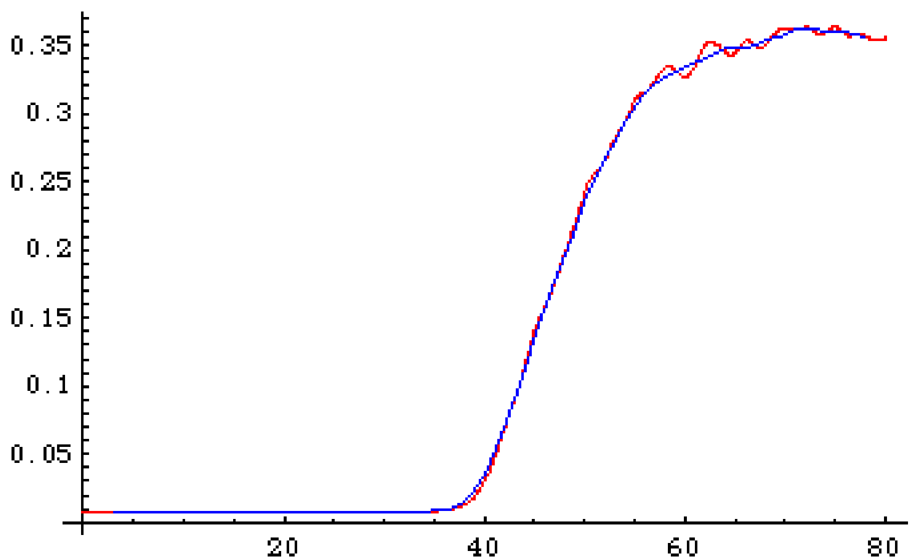
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

Numerischer Zugang

Wir müssen eigentlich nur glätten - Durchschnitt pro je 5 Funktionswerten z.B. nehmen reicht aus

```
for (i=start;i<stop;i++) {
      newy=1/5 * (f(i-2)+f(i-1)+f(i)+f(i+1)+f(i+2))
}
```


0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
20
40
60
80

Integralrechnung

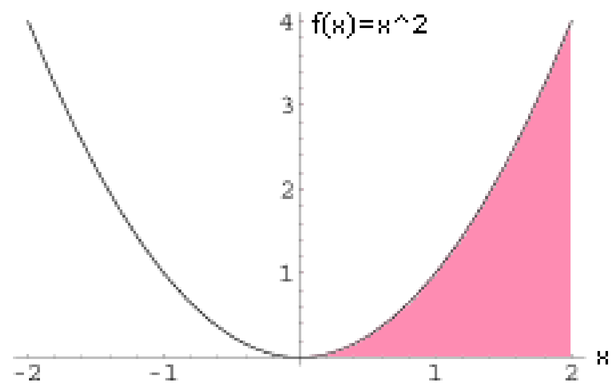
$$max_{(r,x_0,y_0)}\left|G_\sigma\left(r\right) * \frac{\partial}{\partial r}\oint \frac{I\left(x,y\right)}{2\pi r}ds\right|$$

Hier: Ringintegral (Integral über geschlossene Kurve)

Man braucht nicht unbedingt ein Ringintegral. My humble opinion: Anschaulicher mit Flächenintegralen

Davor: erst mal handelsübliche Integrale ;)

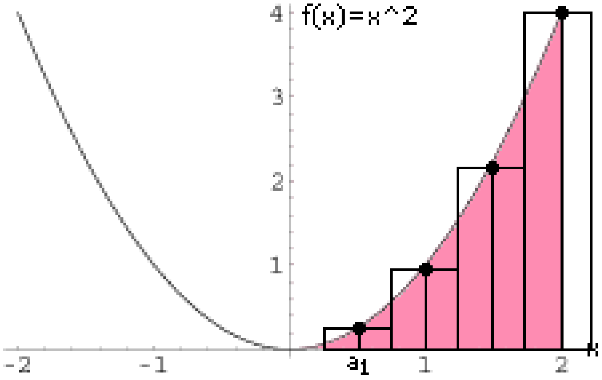
Fläche unter einer Kurve



Suchen die Fläche unter der Kurve zwischen x=0 und x=2

Idee: wir zerschneiden die Fläche in Rechtecke

Fläche unter einer Kurve



$$\sum_{n=1}^{N} (a_i) * (x_n - x_{n-1})$$

Fläche unter einer Kurve

Für $N \to \infty$ (Limes!)

$$\int_c^d f(x)dx := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (a_i) * (x_n - x_{n-1})$$

Je kleiner die Rechtecke (also desto mehr), desto näher kommt unsere Summe dem wahren Wert - dem bestimmten Integral

Was heißt integrieren?

Mit der Integration löst man das Umkehrproblem, aus der Ableitung $f'(x)$ die Funktion $f(x)$ zu bestimmen - also zu einer Funktion $f'(x)$ die Stammfunktion $f(x)$ zu finden

$$f(x) = \int f'(x)dx$$

Regeln?

Differenzieren funktioniert immer - integrieren nicht! Es gibt nicht immer eine Stammfunktion

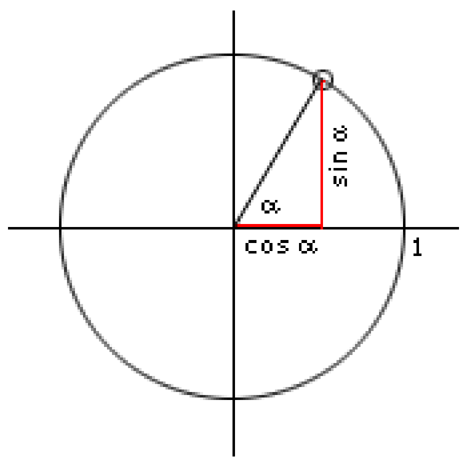
Funktion	Stammfunktion	Funktion	Stammfunktion
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	c	c*x
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$
$\frac{1}{x}$	$ln\|x\|$	cos x	sin x

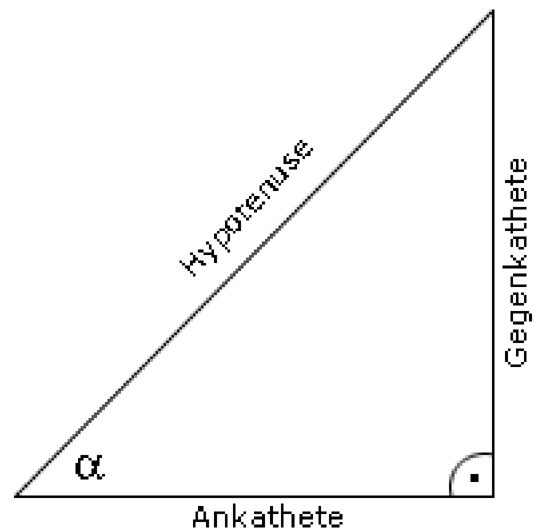
Exkurs: Koordinatensysteme

Kartesische Koordinaten: x, y

Polarkoordinaten: Dazu brauchen wir etwas *Trigonometrie*

Winkelfunktionen





$$sin(\alpha) = \frac{GK}{HYP},\ cos(\alpha) = \frac{AK}{HYP},\ tan(\alpha) = \frac{GK}{AK}$$

Winkelfunktionen (cont.)

Weg mit Grad, her mit Radiant: 360 deg = 2π rad

$$deg = \frac{\pi rad}{180}$$

$$sin(0) = 0,\ sin(\frac{\pi}{2}) = 1,\ sin(\pi) = 0,\ sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$$
$$cos(0) = 1,\ cos(\frac{\pi}{2}) = 0,\ cos(\pi) = -1,\ cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$$

Exkurs: Koordinatensysteme (cont.)

Kartesische Koordinaten: x, y

Polarkoordinaten:

$$x = rcos(\varphi)$$

$$y = rsin(\varphi)$$

(Kugelkoordinaten, Zylinderkoordinaten, ...)

Ein Tip

Nicht versteifen auf Integrale als Flächen unter einer Kurve!
Besser: Integration und Differentation als Einheit sehen

Flächenintegrale

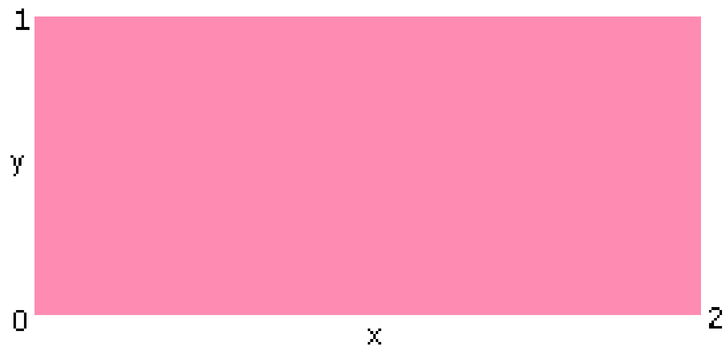
Flächeninhalt in einer Variable hatten wir schon. x war das Funktionsargument
Aber wie berechnet man den Flächeninhalt eines Kreises? Dazu brauchen wir mehr als eine Variable und somit ein *Flächenintegral*

Exkurs: Baby-Fubini

Satz von Fubini: Vertauschung der Reihenfolge der Integration

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dx \right) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dy \right) dx$$

Blödes Beispiel: Rechteck

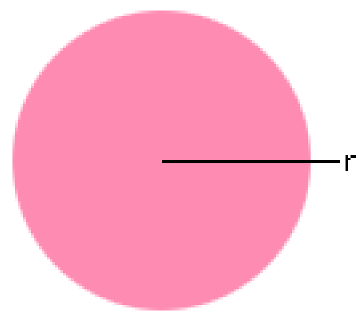


$$\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b (h(x) - g(x))dx$$

$$h(x) = 1,\ g(x) = 0,\ a = 0,\ b = 2$$

$$\int_a^b (h(x) - g(x))dx = \int_0^2 (1-0)dx = x|_0^2 = 2 - 0 = 2$$

nützliches Beispiel: Kreis



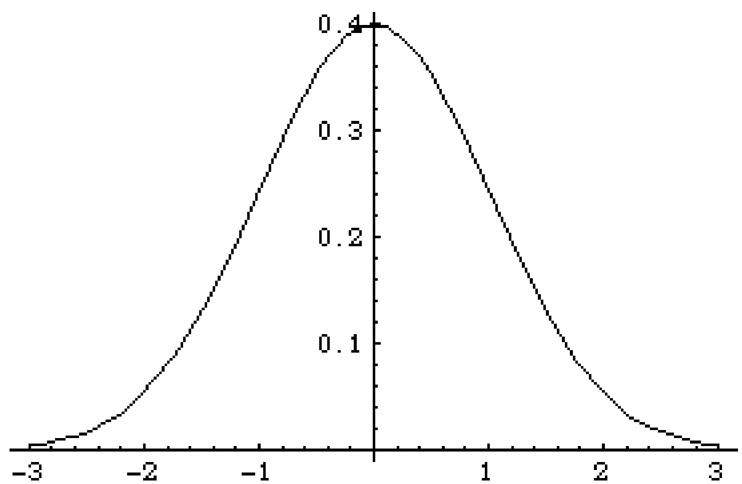
Mit kartesischen oder (viel besser) Polarkoordinaten

$$A = \int_0^r \int_0^{2\pi} r dr d\varphi = \int_0^r 2\pi r dr = r^2\pi$$

Beispiel: Kreisring

$$A = \int_{r_i}^{r_a} \int_0^{2\pi} r dr d\varphi = 2\pi \int_{r_i}^{r_a} r dr = \pi(r_a^2 - r_i^2)$$

Exkurs: Normierung



$f(x)$ normiert auf 1 heißt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Endlich!

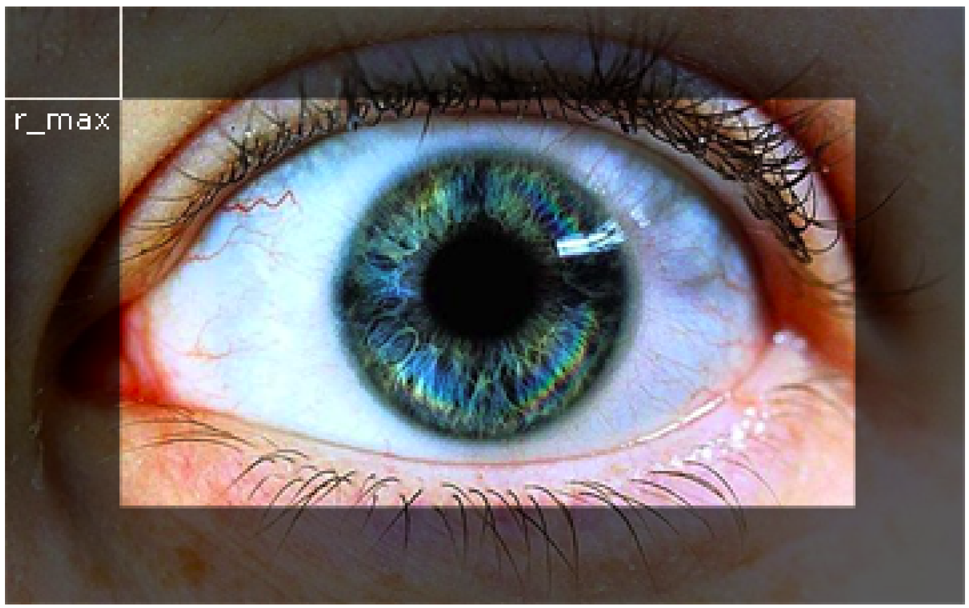
Wir haben soweit alle Mathe die wir brauchen, um das Problem (endlich) anzupacken :)

Nochmal zur Erinnerung:

$$max_{(r,x_0,y_0)}\left|G_\sigma\left(r\right) * \frac{\partial}{\partial r}\oint\frac{I\left(x,y\right)}{2\pi r}ds\right|$$

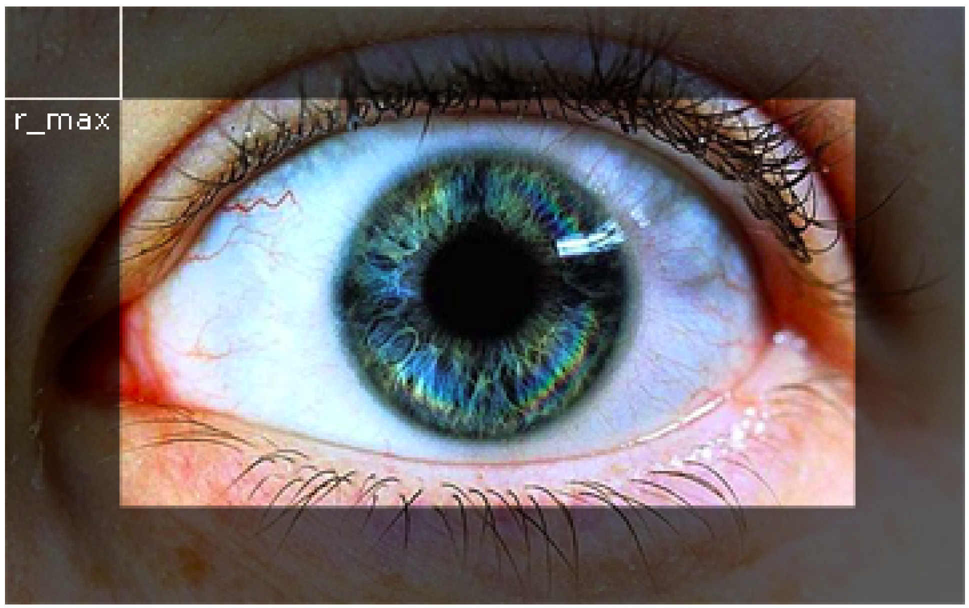
Das Ringintegral schenken wir uns - wir nehmen einfach einen 'unendlich dünnen' Kreisring

Suchs, Struppi



Für alle $P = (x, y)$: Bilde den Durchschnitt der Helligkeitswerte (Graustufen) entlang Kreisringen mit Breite 1 Pixel von $r = 0$ bis $r = r_{max}$

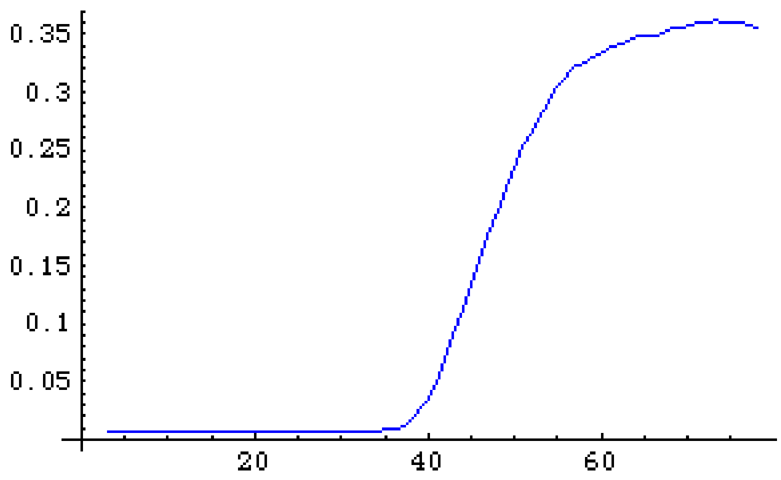
Suchs, Struppi



Für alle $P = (x, y)$: Bilde den Durchschnitt der Helligkeitswerte (Graustufen) entlang Kreisringen mit Breite 1 Pixel von $r = 0$ bis $r = r_{max}$

So siehts aus

Auftragen der Durchschnittswerte der Helligkeit gegen r



Implementierung

C und libSDL - fpc2.c

Sourcen

www.anorganic.org/21C3/

```
Index of /21C3
[   ] iris.tar.gz
[   ] irisrecog.pdf
[   ] mcc.pdf
```

Literatur

Meyberg, Vachenauer: Höhere Mathematik 1

Bronstein: Taschenbuch der Mathematik